Προβλήματα Μάθησης Των Μαθηματικών
Κατά τη Μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο
81- 102, Νοέμβριος 2007

Μαθηματική αναλογική σκέψη στο Δημοτικό και Γυμνάσιο:

Ένα πολυδιάστατο γνωστικό και μεταγνωστικό μοντέλο

ΜΟΔΕΣΤΙΝΑ Σ. ΜΟΔΕΣΤΟΥ: Τμήματα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Η εργασία αυτή αποτελεί μέρος της διατριβής της Μοδεστίνας Μοδέστου, η οποία ολοκληρώθηκε στο Τμήμα Επιστημών της Αγωγής του Πανεπιστημίου Κύπρου για απόκτηση διδακτορικού τίτλου στη Μαθηματική Παιδεία υπό την επίβλεψη του καθηγητή Δρ. Αθανάσιου Γαγάτση.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: *Βασικός σκοπός της ερευνητικής εργασίας ήταν η επιβεβαίωση της ύπαρξης ενός θεωρητικού μοντέλου που να ερμηνεύει τη μαθηματική αναλογική σκέψη στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο. Για την επίτευξη του σκοπού χορηγήθηκαν τρία διαφορετικά δοκίμια σε μαθητές Ε' Δημοτικού μέχρι Γ' Γυμνασίου, τα οποία περιλάμβαναν αναλογικές, μη αναλογικές και μαθηματικές αναλογικές καταστάσεις. Τα ευρήματα έχουν επιβεβαιώσει την ύπαρξη ενός πολυδιάστατου μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, συνεισφέροντας στον προσδιορισμό της ίδιας της έννοιας. Στην έννοια της μαθηματικής αναλογικής σκέψης δεν περιλαμβάνεται αποκλειστικά η ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων (μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός), αλλά και η ικανότητα χειρισμού αναλογικών καταστάσεων σε ένα πλαίσιο μη μαθηματικό (αναλογικός συλλογισμός). Αναπόσπαστο μέρος της έννοιας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αποτελεί και η ικανότητα καθορισμού και διάκρισης των αναλογικών χαρακτηριστικών μιας κατάστασης, συνιστώντας τη μεταγνωστική διάσταση της έννοιας.*

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς μηχανισμούς της γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου. Ως επαγωγικός μηχανισμός, σχετίζεται άμεσα με τη δημιουργία και την τροποποίηση των γνωστικών δομών του ατόμου, μέσω της αναθεώρησης των υπαρχόντων κανόνων και της δημιουργίας νέων κανόνων (Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1989). Το γεγονός αυτό καθιστά τον αναλογικό συλλογισμό αναγκαίο για την κατανόηση και ερμηνεία άγνωστων εννοιών, αλλά και για την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης και την επίλυση προβλήματος (Goswami, 1992).

Ο αναλογικός συλλογισμός, δεν μπορεί παρά να αποτελεί στοιχείο απαραίτητο και για την επιστήμη των μαθηματικών. Ήδη, ξεκινώντας από τα παλαιότερα χρόνια, ο αναλογικός συλλογισμός αποτελεί ένα σημαντικό μαθηματικό εργαλείο για το χειρισμό καταστάσεων σε διάφορα πεδία της ανθρώπινης ενασχόλησης (Freudenthal, 1973). Η φύση αυτού του «εργαλείου» έχει διπλό ρόλο. Από τη μια, χρησιμοποιώντας την αποκλειστικά αναλογική του πτυχή, μπορεί να αποτελέσει στοιχείο κλειδί στη διαχείριση προβληματικών καταστάσεων με τη μεταφορά ήδη υπάρχουσας γνώσης και δεξιοτήτων σε καινούρια έργα που παρουσιάζουν δομικές ομοιότητες με τα προηγούμενα. Από την άλλη, η μαθηματική πτυχή του αναλογικού συλλογισμού είναι απαραίτητη για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων αναλογίας, όπου πρέπει να εντοπιστεί η δομική ομοιότητα ανάμεσα στους αριθμούς και τα δεδομένα της προβληματικής κατάστασης.

Στις μέρες μας δίνεται μεγάλη έμφαση στις αναλογικές σχέσεις μέσα από τα αναλυτικά προγράμματα των μαθηματικών τόσο της Δημοτικής όσο και της Μέσης εκπαίδευσης (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996). Η έννοια της αναλογίας υπάρχει μέσα σε όλο το μαθηματικό οικοδόμημα, ξεκινώντας από την ιδέα της μέτρησης ποσοτήτων, την έννοια των λόγων και την εφαρμογή της μεθόδου του εσωτερικού γινομένου στο Δημοτικό σχολείο και επεκτείνεται στη γραμμική άλγεβρα και τη χρήση των γραμμικών μοντέλων στον απειροστικό λογισμό και τη στατιστική (Van Dooren, 2005).

Η θεμελιώδης σημασία της έννοιας της αναλογίας στη ζωή του ανθρώπου είχε ως αποτέλεσμα να γίνουν από πολύ νωρίς συστηματικές προσπάθειες ορισμού της (Kline, 1990). Σήμερα φαίνεται να υπάρχουν κενά στον ορισμό της ικανότητας που σχετίζεται με την εφαρμογή της έννοιας της αναλογίας (Lamon, 1999) και ειδικότερα φαίνεται να απουσιάζει ένα πλαίσιο που να καθορίζει με ακρίβεια εκείνα τα στοιχεία που σχετίζονται με τη μαθηματική αναλογική σκέψη. Αντίθετα, το πώς γίνεται αντιληπτή η έννοια της μαθηματικής αναλογικής σκέψης υποδηλώνεται έμμεσα μέσα από τα έργα που περιλαμβάνονται στις διάφορες έρευνες που ασχολούνται με το θέμα αυτό (Lesh, Post & Behr, 1988; Misailidou & Williams, 2003), αλλά και στα σχολικά εγχειρίδια (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996). Ειδικότερα, φαίνεται να επικρατεί άδηλα η θέση σύμφωνα με την οποία η μαθηματική αναλογική σκέψη ταυτίζεται απλά με την ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων (Cramer, Post, & Currier, 1993).

Έρευνες γύρω από το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας (De Bock, Verschaffel & Janssens, 1998; Modestou & Gagatsis, 2007; Van Dooren, 2005) υποδεικνύουν ότι αυτή η θεώρηση της μαθηματικής αναλογικής σκέψης δεν μπορεί να ισχύει απόλυτα. Οι μαθητές ανεξαρτήτως ηλικίας, ενώ επιτυγχάνουν στην επίλυση τυπικών αναλογικών προβλημάτων, αποτυγχάνουν στο να τα διακρίνουν από άλλα μη αναλογικά προβλήματα (Modestou, Elia, Gagatsis & Spanoudes, in press). Ως αποτέλεσμα της αποτυχίας διάκρισης των αναλογικών από τις μη αναλογικές καταστάσεις, δημιουργείται στους μαθητές μια "ψευδαίσθηση" για την ύπαρξη αναλογίας, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιούν αναλογικές στρατηγικές για να επιλύσουν ακόμη και τα μη αναλογικά έργα.

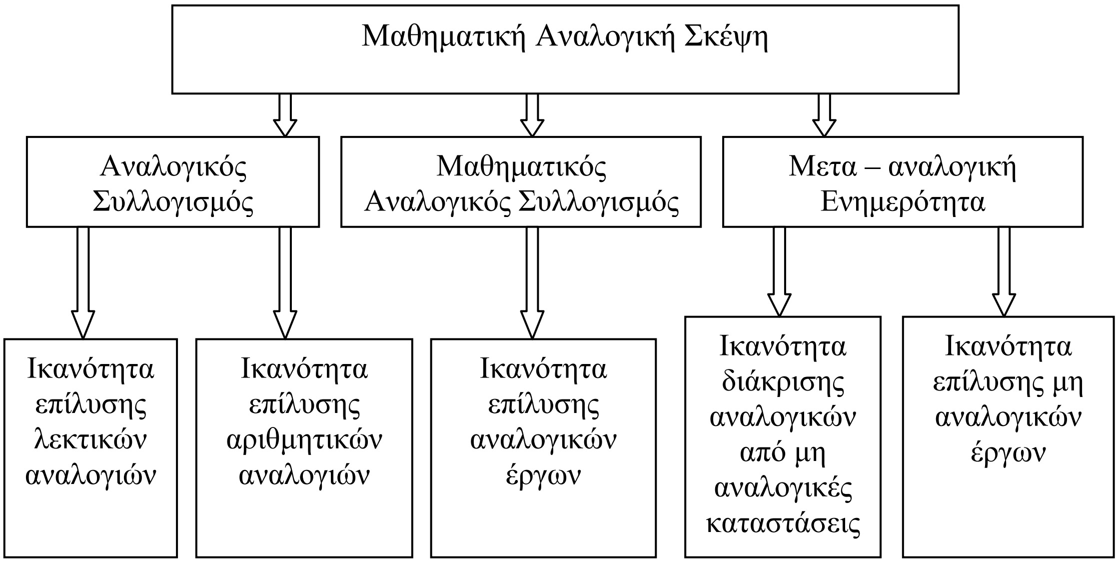
Για παράδειγμα, η τάση των μαθητών να απαντούν, ότι το εμβαδόν ενός τετραγώνου διπλασιάζεται όταν διπλασιαστούν οι πλευρές του, είναι αποτέλεσμα του συγκεκριμένου φαινομένου (De Bock et al., 1998; Modestou & Gagatsis, 2007). Αποτέλεσμα του φαινομένου της ψευδαίσθησης της αναλογίας είναι και οι αναλογικές απαντήσεις των μαθητών σε σταθερά προβλήματα της μορφής $f(x) = ax$: «Ένα πουκάμισο χρειάζεται 25 λεπτά για να στεγνώσει έξω στον ήλιο. Πόσο χρόνο θέλουν τρία πουκάμισα για να στεγνώσουν σε ανάλογες συνθήκες;». Σε αυτό το πρόβλημα οι μαθητές δίνουν απάντηση 75 λεπτά, επηρεαζόμενοι από τη λεκτική δομή του έργου, η οποία παραπέμπει στη χρησιμοποίηση της γραμμικής συνάρτησης $f(y) = ax$.

Τα αναλογικά λάθη των μαθητών δεν είναι περιστασιακά και μεμονωμένα αλλά αντίθετα εμφανίζονται σε ένα ευρύ φάσμα καταστάσεων της καθημερινής ζωής υποδεικνύοντας ότι κάποιος μπορεί πολύ εύκολα να παραπλανηθεί και να χειρίζεται κάθε αριθμητική σχέση ως αναλογική (Freudenthal, 1973), χωρίς να δίνει σημασία στην προβληματική κατάσταση και τους περιορισμούς που αυτή μπορεί να έχει. Κατά συνέπεια το άδηλο μοντέλο το οποίο θεωρεί τη μαθηματική αναλογική σκέψη ως συνώνυμο με την επίλυση τυπικών αναλογικών έργων στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, δεν μπορεί να ισχύει. Ένα άτομο με μαθηματική αναλογική σκέψη δεν μπορεί να προσδιοριστεί απλά ως κάποιο που γνωρίζει να χρησιμοποιεί τους αριθμούς ενός έργου για να επιλύει μια αναλογία (Cramer et al., 1993). Αντίθετα και η ικανότητα του ατόμου να διακρίνει κατά πόσο ένα πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, προσθετικού συλλογισμού ή οποιασδήποτε άλλης αριθμητικής σχέσης είναι απαραίτητη για τη μαθηματική αναλογική σκέψη (Karplus, Pulos & Stage, 1983).

Συνεπώς κρίνεται αναγκαία η αναθεώρηση αλλά και η επιβεβαίωση της ύπαρξης ενός νέου θεωρητικού μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης σε ένα εξελικτικό πλαίσιο καλύπτοντας ηλικίες μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου, στο οποίο να περιλαμβάνεται και μια νέα διάσταση μεταγνωστικής φύσης. Η διάσταση αυτή θα αφορά στην ικανότητα του ατόμου να διακρίνει πρώτα τις αναλογικές από τις μη αναλογικές καταστάσεις και μετά να τις επιλύει, εφαρμόζοντας τις κατάλληλες στρατηγικές. Ταυτόχρονα, μέσα σε αυτό το νέο πλαίσιο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης εξετάζεται το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας όχι σε αντιπαράθεση με την ικανότητα των μαθητών για μαθηματική αναλογική σκέψη, αλλά ως αναπόσπαστο μέρος της στα πλαίσια της διάστασης της μετα-αναλογικής ενημερότητας. Μέχρι σήμερα το συγκεκριμένο φαινόμενο εξεταζόταν ως κάτι που έρχεται σε αντιδιαστολή με την ευρύτερη αναλογική σκέψη των μαθητών: οι μαθητές έχουν ψηλά ποσοστά επιτυχίας στην επίλυση αναλογικών προβλημάτων, και άρα είναι ικανοί για μαθηματική αναλογική σκέψη, αλλά πολύ χαμηλά ποσοστά στην επίλυση μη αναλογικών έργων, με αποτέλεσμα να αποτυγχάνουν (De Bock et al., 1998; Van Dooren, De Bock, De Bolle, Janssens & Verschaffel, 2003). Μια τέτοια αντιμετώπιση του θέματος παραγνωρίζει παρόλα αυτά μια θεμελιώδη πτυχή της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, την ικανότητα ανάλυσης των ποσοτήτων στη δεδομένη κατάσταση, για να διαπιστωθεί πρώτιστα κατά πόσο υπάρχει ανάμεσά τους αναλογική σχέση (Lamon, 1999).

Προτεινόμενο Μοντέλο Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης

Το προτεινόμενο μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης θέτει σε αμφισβήτηση την άδηλη υπόθεση που θέλει τη μαθηματική αναλογική σκέψη να αποτελεί μια μονοδιάστατη διαδικασία που συνίσταται αποκλειστικά από την ικανότητα επίλυσης τυπικών μαθηματικών αναλογικών έργων (μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός). Αντίθετα, το μοντέλο αυτό προεκτείνει βιβλιογραφικά δεδομένα σύμφωνα με τα οποία η μαθηματική αναλογική σκέψη περικλείει ένα πιο ευρύ και σύνθετο φάσμα γνωστικών δεξιοτήτων με τόσο μαθηματικές και ψυχολογικές διαστάσεις (Lesh et al., 1988). Συγκεκριμένα, το προτεινόμενο μοντέλο θεωρεί ότι η μαθηματική αναλογική σκέψη μπορεί να περιγραφεί καλύτερα με ένα μοντέλο τριών διαστάσεων, από τις οποίες η πρώτη διάσταση του αναλογικού συλλογισμού εμπίπτει στο πεδίο της ψυχολογίας, η δεύτερη διάσταση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού εμπίπτει στο πεδίο των μαθηματικών ενώ η τρίτη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας έχει μεταγνωστική φύση (Διάγραμμα 1).



Διάγραμμα 1. Προτεινόμενο μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης.

Η διάσταση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, η οποία αφορά στην ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων, συνεχίζει να αποτελεί θεμελιώδες κομμάτι του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης, αλλά το μοντέλο ολοκληρώνεται με τη συμπερίληψη δύο επιπλέον διαστάσεων που αναφέρονται στην ικανότητα επίλυσης λεκτικών και αριθμητικών αναλογιών σε ένα πλαίσιο μη μαθηματικό (αναλογικός συλλογισμός), καθώς και στην ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών καταστάσεων (μετα-αναλογική ενημερότητα).

Αναλογικός συλλογισμός

Ο αναλογικός συλλογισμός περιλαμβάνει την αναγνώριση και μεταφορά δομικών πληροφοριών από ένα σύστημα (πηγή) σε ένα άλλο (στόχο). Αυτή η μεταφορά πραγματοποιείται με την εύρεση της αντιστοιχίας ανάμεσα στις διαδικασίες και τους μηχανισμούς που χαρακτηρίζουν τα δύο συστήματα (Vosniadou, 1989). Τα συστήματα αυτά μπορεί να συνιστούν έννοιες, θεωρίες ή και προβληματικές καταστάσεις, ενώ παράλληλα στις περισσότερες περιπτώσεις ανήκουν και σε εντελώς διαφορετικά πεδία με όμοια όμως δομή. Αυτά τα χαρακτηριστικά μπορούν να υποστηρίξουν ένα διαφορετικό ορισμό του αναλογικού συλλογισμού ως «της ικανότητας συλλογισμού με μοτίβα», η οποία περιλαμβάνει τον εντοπισμό και την αναγνώριση της επανεμφάνισης του μοτίβου ανεξάρτητα από τη διαφοροποίηση των στοιχείων που μπορεί αυτό να περιλαμβάνει (English, 2004). Η σχέση του αναλογικού συλλογισμού με τη μαθηματική σκέψη και κατ' επέκταση με το μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό βρίσκεται στο ότι και τα δύο σχετίζονται με τις ικανότητες του ατόμου να αναγνωρίζει και να γενικεύει μοτίβα και σχέσεις, είτε αυτά αφορούν συγκεκριμένα αντικείμενα είτε αφορούν αφηρημένες έννοιες (Gonswami, 1992). Κατά συνέπεια, δε μπορεί παρά ο αναλογικός και ο μαθηματικός συλλογισμός να σχετίζονται και να συνδέονται ως γνωστικές διαδικασίες, οι οποίες είναι απαραίτητες για τη δημιουργία και την οργάνωση της εννοιολογικής γνώσης (Deal & Hardy, 2004; English, 2004).

Στην παρούσα ερευνητική εργασία, αυτή ακριβώς η εύρεση μοτίβων θα χρησιμοποιηθεί ως ο σύνδεσμος ανάμεσα στον αναλογικό συλλογισμό και στο μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό αυτή τη φορά. Και αυτό γιατί η εύρεση του μοτίβου δε μπορεί να θεωρηθεί ότι διαφέρει από την εύρεση της δομικής ομοιότητας ανάμεσα στους όρους μιας τυπικής αναλογίας της μορφής Α:Β :: Γ:Δ[1]. Και τα δύο συνδέονται με την εύρεση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα σε δύο όρους, είτε αυτοί είναι σύμβολα, είτε αντικείμενα, είτε έννοιες, και την εφαρμογή της. Αν για παράδειγμα πάρουμε τη σχέση 6:9::10:15 τότε σύμφωνα με τον Polya (1954, σελ. 15), «το σύστημα των δύο αριθμών 6 και 9 είναι ανάλογο με το σύστημα των αριθμών 10 και 15, από τη στιγμή που τα δύο συστήματα συμφωνούν ως προς το λόγο των αντίστοιχων όρων».

Η σχέση αναλογικού και μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού δεν εντοπίζεται μόνο σε επίπεδο κλασσικών έργων αναλογιών με αριθμούς. Οι Hatano και Sakakibara (2004) αναφέρουν ακριβώς ότι οι μαθητές μπορούν να επωφεληθούν από την επίλυση έργων της μορφής Α:Β :: Γ:Δ, αφού η επίλυση τυπικών μαθηματικών προβλημάτων αναλογίας βασίζεται στην ίδια λογική ανάλυση όπως και ένα κλασσικό έργο αναλογιών. Συγκεκριμένα, ο αναλογικός συλλογισμός και η ικανότητα εντοπισμού της δομικής και όχι απλά της επιφανειακής ομοιότητας που υπάρχει σε οπτικές και λεκτικές σχέσεις, θεωρείται απαραίτητη για να μπορούν οι μαθητές να αντιληφθούν όλες τις σχέσεις που υπάρχουν σε μια μαθηματική αναλογία (Lamon, 1999). Το γεγονός αυτό αιτιολογεί θεωρητικά τη συμπερίληψη της διάστασης του αναλογικού συλλογισμού ως αναπόσπαστου μέρους της ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης του ατόμου.

[1] Οι κλασσικές αναλογιές περιλαμβάνουν τέσσερις τουλάχιστον έννοιες και αναπαριστάται από τον τύπο Α:Β :: Γ:Δ, όπου η σχέση ανάμεσα στους όρους Α και Β πρέπει να είναι ισοδύναμη με τη σχέση ανάμεσα στους όρους Γ και Δ. Οι όροι αυτοί μπορούν αν αποτελούνται από λέξεις (πουλί:αέρας ::ψάρι:_), αριθμούς *(3:4 ::15:_)* ή εικόνες ( ) οπότε και συνιστούν λεκτικές, αριθμητικές ή οπτικές αναλογίες, αντίστοιχα. analogies (Gosawmi, 1992; Lamon, 1999).

Μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός

Η έννοια της μαθηματικής αναλογίας περιλαμβάνει μια σχέση ισότητας ανάμεσα σε δύο λόγους (Demetriou, Platsidou, Efklides, Metallidou, & Shayer, 1991) και ιστορικά θεωρείται ταυτόσημη με τη γεωμετρική αναλογία ($\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$). Από τη στιγμή που ένας λόγος είναι μία σχέση ανάμεσα σε δύο ποσότητες, η κατανόηση της αναλογίας αναφέρεται στην κατανόηση της σχέσης που υπάρχει ανάμεσα σε δύο σχέσεις. Οι ποσότητες που περιλαμβάνονται σε κάθε μαθηματική αναλογική σχέση μεταβάλλονται πολλαπλασιαστικά. Συνεπώς, η γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax$ (όπου $\alpha \neq 0$) μπορεί να περιγράψει μαθηματικά κάθε αναλογική σχέση (Van Dooren, 2005) και απεικονίζει μία ευθεία γραμμή η οποία περνά από την αρχή των αξόνων.

Κατά τη διάρκεια των πρώτων τάξεων του Δημοτικού σχολείου οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της αναλογίας μέσα από την επίλυση απλών αναλογικών προβλημάτων που βασίζονται αρχικά στη σχέση 2:1. Στη συνέχεια και ειδικά στην Κύπρο (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996), οι μαθητές χειρίζονται πιο συστηματικά αναλογικά έργα με τη βοήθεια του σχήματος της αναλογίας το οποίο στηρίζεται τη θεωρία σχήματος (Marshall, 1995). Χαρακτηριστικό των έργων αυτών είναι ότι επιλύονται με απλή εφαρμογή μιας πράξης (είτε πολλαπλασιασμού είτε διαίρεσης), αφού στις περισσότερες φορές ο ένας δεδομένος αριθμός είναι η μονάδα. Στη συνέχεια τα έργα γίνονται πιο σύνθετα με την εμπλοκή διαφορετικών αριθμών και οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια της αναλογίας ως ισότητας δύο λόγων $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$. Προτού οι μαθητές εξοικειωθούν με συγκρίσεις και πιθανές σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στις ποσότητες των δύο λόγων τους παρουσιάζεται η μέθοδος του εσωτερικού γινομένου, η οποία χρησιμοποιείται ως η εύκολη λύση για τα προβλήματα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη.

Ο μνημονικός αυτός κανόνας αποτελεί την επικρατέστερη μέθοδο επίλυσης αναλογικών προβλημάτων όχι μόνο στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Κύπρου αλλά και παγκόσμια (Christou & Philippou, 2002). Παρόλα αυτά, ερευνητικά δεδομένα δείχνουν ότι η μέθοδος αυτή σπάνια γίνεται κατανοητή από τους μαθητές (Lesh et al., 1988). Δεν προκύπτει αυθόρμητα αλλά δίνεται από τον εκπαιδευτικό και χρησιμοποιείται αλγοριθμικά από τους μαθητές για να τους βοηθήσει στην επίλυση προβλημάτων.

Η αλγοριθμική ικανότητα εφαρμογής αυτής της μεθόδου σε συγκεκριμένα προβλήματα δε συνιστά αναλογικό συλλογισμό (Lamon, 1999), αφού κάθε είδους συλλογισμού πρέπει να περιλαμβάνει συνειδητή και σκόπιμη δράση παρά την τυφλή εφαρμογή μιας διαδικασίας που θα δώσει την ορθή, σε μερικές περιπτώσεις, απάντηση. Στην περίπτωση του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού μάλιστα, η αλγοριθμική εφαρμογή της μεθόδου του εσωτερικού γινομένου μπορεί να θεωρηθεί και ότι τον παρεμποδίζει (Lesh et al., 1988). Οι ίδιοι (Lesh et al, 1988) τονίζουν την ανάγκη ύπαρξης κάποιας ένδειξης, η οποία να υποδεικνύει ότι το παιδί μπορεί να εντοπίσει την πραγματική σχέση ανάμεσα στα δύο μέλη της εξίσωσης την οποία κατασκεύασε, για να είναι δυνατή η αναφορά στη χρήση του αναλογικού συλλογισμού. Αυτή η ένδειξη είναι η ικανότητα ανάλυσης των ποσοτήτων στη δεδομένη κατάσταση για να διαπιστωθεί πρώτιστα κατά πόσο υπάρχει ανάμεσά τους αναλογική σχέση (Lamon,1999). Ένας μαθητής που πραγματικά μπορεί να σκεφτεί και να δράσει αναλογικά θα πρέπει να αναγνωρίζει περιπτώσεις της καθημερινής ζωής στις οποίες η χρήση αναλογιών είναι ή όχι χρήσιμη και όχι να γνωρίζει απλώς πώς να εφαρμόζει ένα αλγόριθμο.

Μετα-αναλογική ενημερότητα

Όπως έχει υποστηριχθεί και αναπτυχθεί μέχρι τώρα, η ικανότητα επίλυσης τυπικών αναλογικών προβλημάτων είναι μεν απαραίτητη συνθήκη για την ύπαρξη της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αλλά όχι και η μόνη. Βασική πτυχή της μαθηματικής αναλογικής σκέψης είναι και η ικανότητα ανάλυσης των ποσοτήτων στη δεδομένη κατάσταση για να διαπιστωθεί πρώτιστα κατά πόσο υπάρχει ανάμεσά τους αναλογική σχέση (Karplus et al., 1983; Lamon, 1999). Αύτη η ικανότητα συνδέεται άμεσα με τη δεξιότητα αναγνώρισης και καθορισμού της προβληματικής κατάστασης, η οποία και αποτελεί την πρώτη από τέσσερις γενικές μεταγνωστικές διαδικασίες που υποβοηθούν τη διαδικασία επίλυσης προβλήματος ανεξαρτήτως πλαισίου (Davidson, Deuser & Sternberg, 1994). Συνεπώς, οι μαθητές για να μπορέσουν να προχωρήσουν σε μια επιτυχημένη επίλυση κάποιου έργου θα πρέπει πρώτα να είναι σε θέση να αναγνωρίσουν και να κωδικοποιήσουν τα βασικά στοιχεία της προβληματικής κατάστασης.

Με βάση τα στοιχεία αυτά, η τάση των μαθητών να χρησιμοποιούν συστηματικά το αναλογικό μοντέλο και σε καταστάσεις για τις οποίες δεν είναι κατάλληλο, φαίνεται να συνδέεται με την απουσία της δεξιότητας αναγνώρισης και καθορισμού της προβληματικής κατάστασης και άρα μετα-αναλογικής ενημερότητας από μέρους των μαθητών. Συνεπώς, το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας και οι δυσκολίες που προκαλεί στους μαθητές η αναγνώρισή του, εντάσσονται στο προτεινόμενο μοντέλο περιγραφής του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού κάτω από τη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας, η οποία έχει μεταγνωστικά χαρακτηριστικά. Ο όρος «μετα-αναλογική ενημερότητα» προτείνεται για πρώτη φορά στη βιβλιογραφία ως αποτέλεσμα της ανάγκης σύνδεσης του φαινομένου της ψευδάισθησης της αναλογίας με την ευρύτερη μαθηματική αναλογική σκέψη. Έτσι, αν η μεταγνώση ορίζεται ως «η γνώση του ατόμου για το γνωστικό του σύστημα και ο έλεγχος που ασκεί σε αυτό» (Brown, 1987), τότε και η μετα-αναλογική ενημερότητα σχετίζεται με τη γνώση και τον έλεγχο των συγκεκριμένων γνωστικών διαδικασιών που αφορούν στον αναλογικό συλλογισμό.

2. ΣΚΟΠΟΣ- ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Όπως έχει διαφανεί ο κύριος σκοπός της έρευνας συνίσταται στην επιβεβαίωση ενός θεωρητικού μοντέλου ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, στο οποίο εκτός από την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων (μαθηματικός αναλογικός συλλογισμός), να περιλαμβάνεται και η ικανότητα χειρισμού λεκτικών και αριθμητικών αναλογικών σε μη μαθηματικό πλαίσιο (αναλογικός συλλογισμός), καθώς και η ικανότητα καθορισμού των χαρακτηριστικών της προβληματικής κατάστασης (μετα-αναλογική ενημερότητα). Ειδικότερα επιδιώκεται η απάντηση και των πιο κάτω ερωτημάτων:

- Σε ποιο βαθμό μπορεί το προτεινόμενο μοντέλο να ερμηνεύσει τη μαθηματική αναλογική σκέψη;
- Πώς διαφοροποιείται η επίδοση των μαθητών στα έργα αναλογικού συλλογισμού, μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού καθώς και μετα-αναλογικής ενημερότητας σε σχέση με την ηλικία τους;
- Με ποιο τρόπο διαφοροποιούνται οι στρατηγικές επίλυσης αναλογικών και μη αναλογικών προβλημάτων με βάση την ηλικία των μαθητών;

3. ΜΕΘΟΔΟΣ

Δείγμα

Το δείγμα της έρευνας περιελάμβανε 945 μαθητές από 59 τμήματα της Ε’ και Στ’ τάξης Δημοτικών σχολείων καθώς και της Α΄, Β΄ και Γ’ τάξης Γυμνασίων διαφορετικών πόλεων και επαρχιών της Κύπρου, στους οποίους και χορηγήθηκαν τρία διαφορετικά Δοκίμια (Ι, ΙΙ και ΙΙΙ) κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς 2005-2006. Αναλυτικότερα, το δείγμα της ερευνητικής εργασίας περιελάμβανε, 184 μαθητές από την Ε΄ Δημοτικού, 199 από τη Στ΄ Δημοτικού, 221 από την Α΄ Γυμνασίου, 186 από τη Β΄ Γυμνασίου και 155 από τη Γ ΄ Γυμνασίου.

Μέσα Συλλογής Δεδομένων

Για τη διεκπεραίωση της εργασίας χορηγήθηκαν στους μαθητές τρία διαφορετικά δοκίμια τα οποία περιελάμβαναν έργα τα οποία αφορούσαν τις τρεις διαστάσεις του προτεινόμενου μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης, όπως αυτό έχει περιγραφεί πιο πάνω. Πρέπει να σημειωθεί ότι κανένα από τα τρία δοκίμια δεν περιελάμβανε αποκλειστικά έργα μιας διάστασης για να αποφευχθεί τυχόν επηρεασμός των υποκειμένων από τα ίδια τα μέσα μέτρησης.

Συγκεκριμένα, το Δοκίμιο Ι οργανώθηκε σε τρεις ευρύτερες ομάδες έργων (Πίνακας 1) οι οποίες είχαν ως στόχο την αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για επίλυση αναλογικών προβλημάτων καθώς και της ικανότητας διάκρισης των αναλογικών από τα μη αναλογικά προβλήματα.

- Η πρώτη ομάδα περιελάμβανε έξι δηλώσεις (δύο αναλογικές και τέσσερις μη αναλογικές) την ορθότητα των οποίων καλούνται να κρίνουν και να αιτιολογήσουν οι μαθητές (Πίνακας 1, Μέρος Α). Στην περίπτωση που μια δήλωση δεν ήταν ορθή οι μαθητές καλούνταν να τη διορθώσουν μεταβάλλοντας μόνο έναν αριθμό. Αν κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό καλούνταν να δηλώσουν το λόγο.

- Η δεύτερη ομάδα έργων του Δοκιμίου Ι αποτελούνταν από τρία άμεσα προβλήματα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (Πίνακας 1, Μέρος Β). Τα έργα αυτά βασίζονταν σε μία συνταγή μαγειρικής για τρία άτομα, τις ποσότητες των υλικών της οποίας οι μαθητές πρέπει να διαφοροποιήσουν ώστε να γίνει κατάλληλη για τέσσερα και 12 άτομα.
- Η τρίτη και τελευταία ομάδα έργων αποτελείται από επίσης τρία άμεσα προβλήματα σύγκρισης που αφορούν στη γλυκύτητα της λεμονάδας που φτιάχνουν δύο παιδιά. Χαρακτηριστικό και των τριών προβλημάτων είναι ότι στο τέλος περιλαμβάνουν μία ερώτηση που αναγκάζει τους μαθητές να μεταβάλουν ένα δεδομένο του προβλήματος, ώστε οι λεμονάδες των παιδιών να έχουν την ίδια γεύση (Πίνακας 1, Μέρος Γ). Πρέπει να σημειωθεί ότι τόσο τα έργα σύγκρισης όσο και τα έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη θεωρούνται άμεσα γιατί στην επίλυσή τους δε παρεμβαίνει οποιαδήποτε άλλη έννοια εκτός από αυτή που αναφέρεται στο κείμενο, σε αντίθεση με τα έμμεσα έργα (Van Dooren et al., 2003).

Το Δοκίμιο ΙΙ στόχευε στη αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών στην επίλυση έμμεσων αναλογικών και μη αναλογικών γεωμετρικών έργων. Όλα τα έργα αφορούσαν στα σχήματα του τετραγώνου και του κύκλου, με έμμεση αναφορά στις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού (Van Dooren et al., 2003). Συγκεκριμένα και στα οκτώ έργα οι έννοιες του εμβαδού και της περιμέτρου δεν δηλώνονταν άμεσα αλλά προέκυπταν έμμεσα μέσα από λέξεις οι οποίες παρέπεμπαν είτε στο εσωτερικό ή στην περιφέρεια των σχημάτων, αντίστοιχα. Τα έμμεσα γεωμετρικά έργα δόθηκαν στους μαθητές σε δύο πλαίσια όπως και στην περίπτωση των άμεσων έργων: έργα σύγκρισης και έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη (Πίνακας 2).

Το τελευταίο δοκίμιο (Δοκίμιο ΙΙΙ) στόχευε πρώτιστα στην αξιολόγηση της ικανότητας των μαθητών για επίλυση λεκτικών και αριθμητικών αναλογιών (αναλογικός συλλογισμός) και οργανώθηκε σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος οι μαθητές κλήθηκαν να λύσουν εννιά λεκτικές αναλογίες της μορφής Α:Β:: Γ:Δ, οι οποίες βασίζονται στο τεστ αναλογικής σκέψης του Miller (Meagher, 2006). Ειδικότερα, οι μαθητές καλούνταν να εντοπίσουν τη σχέση που συνδέει το πρώτο ζεύγος λέξεων και εφαρμόζοντάς την στο δεύτερο ζεύγος λέξεων να βρουν τη λέξη που λείπει (*μελάνι:πένα:: μπόγια:_ (χρώμα, βούρτσα, χαρτί)*). Οι λεκτικές αυτές αναλογίες οργανώθηκαν σε τρεις ευρύτερες κατηγορίες, οι οποίες αντιστοιχούν στη σημασιολογία, στην ταξινόμηση και στο συσχετισμό (Meagher, 2006). Η σημασιολογική κατηγορία της αναλογίας μπορεί να θεωρηθεί ότι περιλαμβάνει τους ορισμούς των λέξεων που χρησιμοποιούνται. Η ταξινομική κατηγορία της αναλογίας αφορά στην ιεράρχηση λέξεων και εννοιών, ενώ η κατηγορία του συσχετισμού χειρίζεται σχέσεις ανάμεσα σε δύο διακριτές αλλά σχετιζόμενες έννοιες.

Πίνακας 1

Παραδείγματα έργων που Περιλήφθηκαν στο Δοκίμιο Ι (Άμεσα Μέτρα)

Μέρος Α	«Αν ένα αγόρι 9 ετών έχει ύψος 1.23m, τότε στα 18 του χρόνια θα έχει ύψος 2.46m.» Η δήλωση είναι Ορθή/ Λανθασμένη, γιατί... *Συμπλήρωσέ το μόνο αν επέλεξες ότι η δήλωση είναι λανθασμένη!* Μπορεί να διορθωθεί η δήλωση αλλάζοντας ένα μόνο αριθμό; Με ποιο τρόπο; Αν όχι εξήγησε το γιατί.. (Lamon, 1999)
Μέρος Β	Συνταγή κρέμας σοκολάτας για τρία άτομα *120 γρ. σοκολάτα κουβερτούρα* *9 κουταλιές κρέμα γάλακτος* *3 κρόκοι αυγών* *4 κουταλιές λικέρ καφέ* *5 κουταλιές ζάχαρη* «Η μητέρα θέλει να φτιάξει την κρέμα για την οικογένειά μας που αποτελείται από τέσσερα άτομα. Πόσες κουταλιές κρέμας γάλακτος θα χρειαστεί;» (Misailidou & Williams, 1998)
Μέρος Γ	«Ο Γιάννης χρησιμοποίησε 6 κουτάλια ζάχαρη και 12 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού, ενώ η Μαρία χρησιμοποίησε 4 κουτάλια ζάχαρη και 7 φλυντζανάκια χυμό λεμονιού.» ➢ Ο Γιάννης / Η Μαρία έφτιαξε τη πιο γλυκιά λεμονάδα γιατί............ ➢ Για να έχει η λεμονάδα των δύο παιδιών την ίδια γεύση πρέπει:...... (Karplus et al., 1983)

Στο δεύτερο μέρος οι μαθητές είχαν να αντιμετωπίσουν δέκα έργα αριθμητικών αναλογιών (πχ. *6:8::9:_ (12,18,27)*), τα οποία επίσης περιλαμβάνονται ως κατηγορία στο τεστ του Miller (Meagher, 2006). Τα έργα είχαν διαφορετικό βαθμό δυσκολίας αφού ο λόγος ανάμεσα στους όρους δεν ήταν πάντα ακέραιος. Συγκεκριμένα, περιλήφθηκαν τέσσερα έργα με ακέραιο λόγο, δύο με μη ακέραιο λόγο και δύο στα οποία οι όροι συνδέονταν με σχέση στο τετράγωνο ή στον κύβο. Στα δύο τελευταία έργα οι μαθητές κλήθηκαν να τα συσχετίσουν με τα προηγούμενα οκτώ και να βρουν την αναλογία που υπάρχει στη δομή τους.

Πίνακας 2

Παραδείγματα έργων που Περιλήφθηκαν στο Δοκίμιο ΙΙ (Έμμεσα Μέτρα)

Δίνονται οι τρεις ποσότητες – ζητείται η τέταρτη *Μη αναλογικό-Εμβαδόν*	Η δασκάλα έδωσε στους μαθητές ένα φυλλάδιο με εικόνες και μπογιά για να τις βάψουν. Ο Χρίστος χρησιμοποίησε 8ml μπογιάς για να βάψει το εσωτερικό μιας τετράγωνης εικόνας πλευράς 4cm. Πόση μπογιά χρησιμοποίησε ο Γιώργος για να βάψει μια μεγέθυνση της ίδιας εικόνας με πλευρά 12cm;
Σύγκρισης *Αναλογικό-Περίμετρος*	Η κ. Άννα είναι ράπτρια. Χρειάζεται 5 λεπτά για να ράψει κορδέλα γύρω από μία τετράγωνη πετσέτα πλευράς 30cm. Υπολόγισε ότι χρειάζεται 30 λεπτά για να ράψει την ίδια κορδέλα γύρω από ένα τραπεζομάντιλο ίδιου σχήματος και πλευράς 180cm. Είναι σωστοί οι υπολογισμοί της κ. Άννας; Αν όχι, πόσο χρόνο χρειάζεται για το τραπεζομάντιλο;

Ανάλυση Δεδομένων

Μετά τη χορήγηση και τη συλλογή των τριών δοκιμίων εφαρμόστηκε πάνω στα δεδομένα της ερευνητικής εργασίας η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση καθώς και η πολλαπλή ανάλυση διασποράς (MANOVA) για να γίνει εφικτή η μελέτη των ερευνητικών ερωτημάτων που τέθηκαν. Συγκεκριμένα, η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση εφαρμόστηκε τόσο σε ολόκληρο το δείγμα των μαθητών, όσο και στους μαθητές κάθε κύκλου (Δημοτικό-Γυμνάσιο). Αυτό είχε σκοπό την επαλήθευση του θεωρητικού μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης τόσο στο σύνολο των μαθητών όσο και σε κάθε επίπεδο ξεχωριστά. Για την εξέταση των προτεινόμενων μοντέλων έχει χρησιμοποιηθεί ένα διαδεδομένο πρόγραμμα δομικών μοντέλων εξίσωσης (Structural Equation Modelling – SEM), το EQS (Bentler, 1995). Για να εξακριβωθεί ο βαθμός στον οποίο το μοντέλο συμφωνεί με τα δεδομένα, εξετάστηκαν τρεις δείκτες: η αναλογία x^2 προς τους βαθμούς ελευθερίας ($\frac{x^2}{df}$), το Comparative Fit Index (CFI) και το Root Mean Square Error of Approximation (RMSEA). Είναι γενικά αποδεκτό ότι οι τιμές που καθιστούν ένα μοντέλο κατάλληλο για τα δεδομένα μιας έρευνας είναι οι ακόλουθες: $x^2/df<2$, CFI>.9 και RMSEA<.05.

Η πολλαπλή ανάλυση διασποράς εφαρμόστηκε στα έργα κάθε διάστασης για να διαπιστωθεί κατά πόσο η επίδοση των μαθητών σε αυτά ήταν επηρεασμένη από την ηλικία των μαθητών. Κάτι τέτοιο θα παρείχε και ενδείξεις για τη φύση της κάθε διάστασης.

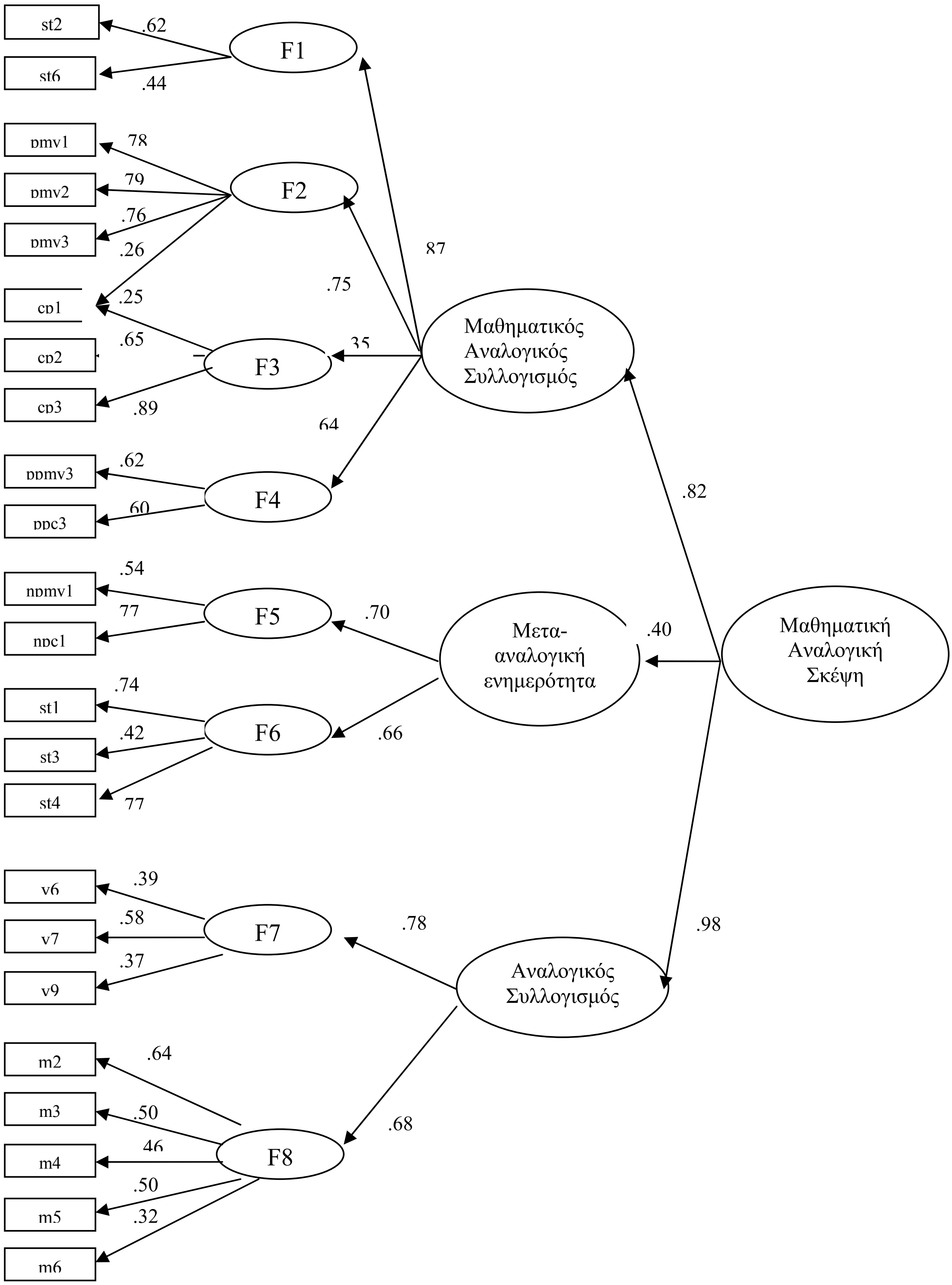
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Το Μοντέλο Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης

Με την εφαρμογή της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης έγινε προσπάθεια να αναπτυχθεί ένα θεωρητικό μοντέλο και να ελεγχθεί η εγκυρότητα του, ώστε να προσδιοριστεί η δομή και οι διαστάσεις της μαθηματικής αναλογικής σκέψης. Η βασική υπόθεση της εργασίας είναι ότι η μαθηματική αναλογική σκέψη συνίσταται από τρεις διακριτές διαστάσεις, οι οποίες αναφέρονται στην ικανότητα του ατόμου για αναλογικό συλλογισμό, μαθηματικό αναλογικό συλλογισμό καθώς την μετα-αναλογική ενημερότητα. Το μοντέλο αυτό παρουσιάστηκε να ταιριάζει με τα δεδομένα της έρευνας αφού οι δείκτες του κυμάνθηκαν στα επιθυμητά πλαίσια (CFI=0.95; $\frac{x^2}{df}$ = 1.96; RMSEA=0.032). Επομένως, το συγκεκριμένο μοντέλο (Διάγραμμα 2) μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλο για να ερμηνεύσει τη μαθηματική αναλογική σκέψη.

Από το Διάγραμμα 2 φαίνεται ότι τα έργα των τριών δοκιμίων που χορηγήθηκαν, ομαδοποιούνται σε οκτώ παράγοντες πρώτης τάξης, τόσο για το Δημοτικό όσο και για το Γυμνάσιο. Οι παράγοντες αυτοί διακρίνονται μεταξύ τους τόσο με βάση το είδος των έργων, το αν δηλαδή είναι αναλογικά ή μη αναλογικά, όσο και με βάση το πλαίσιο παρουσίασής τους. Ειδικότερα, οι τέσσερις πρώτοι παράγοντες πρώτης τάξης (F1-F4) συνίστανται από έργα μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, τα οποία στη συνέχεια σχηματίζουν και τον αντίστοιχο παράγοντα δεύτερης τάξης. Συγκεκριμένα, ο πρώτος παράγοντας πρώτης τάξης F1 αποτελείται από τις αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι, τις οποίες οι μαθητές έπρεπε να αναγνωρίσουν ανάμεσα σε άλλες μη αναλογικές και να διορθώσουν σε περίπτωση που δεν ήταν ορθές. Ο δεύτερος παράγοντας πρώτης τάξης (F2) δημιουργείται από τα άμεσα αναλογικά έργα στα οποία δίνονται οι τρεις ποσότητες, ενώ ο παράγοντας F3 από τα αντίστοιχα έργα σύγκρισης. Τέλος, ο παράγοντας πρώτης τάξης F4, ο οποίος αναφέρεται στο σύνολο των έμμεσων αναλογικών έργων που αφορούν στο σχήμα του ορθογωνίου, συμπληρώνει το δεύτερης τάξης παράγοντα του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού. Πρέπει να σημειωθεί ότι στο μοντέλο αυτό δεν περιλήφθηκαν έργα κύκλου, λόγω του ότι το συγκεκριμένο σχήμα δεν αποτέλεσε αντικείμενο διδασκαλίας για τους μαθητές του Δημοτικού σχολείου.

Σε σχέση με τον ευρύτερο παράγοντα του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, ο παράγοντας F2 που αναφέρεται στα έργα σύγκρισης, παρουσίασε το χαμηλότερο δείκτη φόρτισης (0.37) κυρίως λόγω της απουσίας εξοικείωσης των μαθητών με έργα αυτής της μορφής. Οι υπόλοιποι παράγοντες είχαν ψηλότερους δείκτες φόρτισης ως προς τον παράγοντα του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (F1(0.96), F2(0.78), F4(0.66)) αφού στην πλειοψηφία τους περιελάμβαναν έργα τα οποία δίνουν τις τρεις ποσότητες και ζητούν την τέταρτη και τα οποία ήταν πιο εύκολο να τα χειριστούν οι μαθητές.



Διάγραμμα 2. Το μοντέλο μαθηματικής αναλογικής σκέψης.

Οι παράγοντες πρώτης τάξης F5 και F6 συνίστανται από τα μη αναλογικά έργα των δοκιμίων και δημιουργούν τον παράγοντα δεύτερης τάξης που αναφέρεται στη μετα-αναλογική ενημερότητα. Συγκεκριμένα, ο παράγοντας F5 αποτελείται από τα έμμεσα μη αναλογικά έργα του Δοκιμίου ΙΙ, τα οποία αναφέρονται σε ορθογώνιο σχήμα (δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη και σύγκρισης), ενώ ο παράγοντας F6 από τις μη αναλογικές δηλώσεις του Δοκιμίου Ι. Οι φορτίσεις των δύο παραγόντων F5 (0.62) και F6 (0.65) προς τον παράγοντα της μετα-αναλογικής ενημερότητας κυμαίνονται στα ίδια επίπεδα. Αυτό αποτελεί ένδειξη του ότι η ικανότητα διάκρισης του είδους μιας κατάστασης (αναλογική ή μη αναλογική) μπορεί να προβλέψει στον ίδιο βαθμό τη μετα-αναλογική ενημερότητα, όσο και η ικανότητα επίλυσής των καταστάσεων αυτών.

Τέλος, οι εναπομείναντες δύο παράγοντες πρώτης τάξης (F7 και F8) αποτελούνται από έργα αναλογικού συλλογισμού και συνθέτουν τον τελευταίο παράγοντα δεύτερης τάξης, που αντιστοιχεί στον αναλογικό συλλογισμό, με παρόμοιους μάλιστα δείκτες φόρτισης. Ο παράγοντας F8 αφορά στις αριθμητικές αναλογίες που σχετίζονται με την εύρεση ακέραιου και μη ακέραιου λόγου (m2-m6). Ο παράγοντας F7 συνίσταται αποκλειστικά από τις λεκτικές αναλογίες που εμπίπτουν στην υποκατηγορία του συσχετισμού (v6, v7 και v9) και η οποία αναφέρεται στην εύρεση σχέσεων ανάμεσα σε δύο διακριτές αλλά σχετιζόμενες έννοιες.

Οι τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης, οι οποίοι αντιστοιχούν στις διαστάσεις του αναλογικού συλλογισμού, του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού και της μετα-αναλογικής ενημερότητας, δημιουργούν τον ευρύτερο παράγοντα τρίτης τάξης που ταυτίζεται με τη μαθηματική αναλογική σκέψη. Ο παράγοντας της μετα-αναλογικής ενημερότητας έχει το χαμηλότερο δείκτη πρόβλεψης (0.53) της μαθηματικής αναλογικής σκέψης σε σχέση με τους άλλους δύο παράγοντες του αναλογικού (0.97) και του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού (0.87). Το γεγονός αυτό καταδεικνύει ότι τα έργα μετα-αναλογικής ενημερότητας προϋποθέτουν την ενεργοποίηση διαφορετικών μηχανισμών για την επίλυσή τους, σε σχέση με τα έργα των άλλων δύο διαστάσεων, οι οποίοι δεν είναι αποκλειστικά γνωστικοί.

Οι Διαστάσεις του Μοντέλου Μαθηματικής Αναλογικής Σκέψης στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο

Αναλογικός Συλλογισμός

Οι τρεις διαστάσεις του μοντέλου της μαθηματικής αναλογικής σκέψης και ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές χειρίζονται τα έργα της κάθε διάστασης δε διαφοροποιούνται με τον ίδιο τρόπο από την μια ηλικιακή ομάδα στην άλλη. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι οι τρεις διαστάσεις επηρεάζονται από διαφορετικούς παράγοντες και έχουν διαφορετική φύση. Η σταδιακή αύξηση της επίδοσης των μαθητών τόσο στα λεκτικά όσο και στα αριθμητικά έργα αναλογικού συλλογισμού από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο (Πίνακας 3), προσδίδει στη διάσταση αυτή ένα εξελικτικό χαρακτήρα.

Πίνακας 3

Μέσοι Όροι Επίδοσης στα Έργα Αναλογικού Συλλογισμού κατά Τάξη

	Έργα Αναλογικού Συλλογισμού											
Τάξη	Λεκτικά						Αριθμητικά					
	σημασιολογία		ταξινόμηση		συσχετισμός		ακέραιος λόγος		μη ακέραιος λόγος		δομική ομοιότητα	
	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD
Ε’	.64	.24	.50	.35	.34	.28	.77	.27	.61	.39	.19	.27
Στ’	.65	.21	.47	.33	.38	.31	.86	.21	.74	.31	.35	.34
Α’	.66	.26	.58	.36	.46	.33	.89	.20	.67	.37	.39	.32
Β’	.69	.24	.56	.36	.50	.32	.90	.17	.81	.29	.46	.35
Γ’	.78	.24	.67	.36	.58	.32	.86	.23	.75	.33	.37	.35
Σύνολο	.68	.25	.45	.30	.67	.27	.85	.22	.54	.28	.35	.34

$p<0.05$

Η ικανότητα για αναλογικό συλλογισμό παρουσίασε μεγαλύτερη αύξηση σε δύο ομάδες μαθητών οι οποίες διαφοροποιήθηκαν με βάση το είδος του έργου. Συγκεκριμένα, σημαντική αύξηση της επίδοσης των μαθητών στις λεκτικές αναλογίες παρατηρήθηκε στην Α’ ($t_{ταξ}$=3.24, p<.001; $t_{συσ}$=2.87, p<.005) και Γ’ Γυμνασίου ($t_{σημ}$=3.41, p<.001; $t_{ταξ}$=2.81, p<.005; $t_{συσ}$=2.07, p<.05), καθώς και της αντίστοιχης επίδοσής τους στις αριθμητικές αναλογίες στη Στ’ Δημοτικού ($t_{α.λ.}$=3.56, p<.001; $t_{μ.α.λ.}$=3.62, p<.001; $t_{δ.ο.}$=5.14, p<.001) και Β’ Γυμνασίου ($t_{μ.α.λ.}$=4.15, p<.001; $t_{δ.ο.}$=2.24, p<.05). Τα στοιχεία αυτά συμφωνούν με τις καμπύλες ανάπτυξης της ποσοτικής-συσχετικής ικανότητας, που προέκυψαν από έρευνες στα εξειδικευμένα δομικά συστήματα (ΕΔΟΣ), σύμφωνα με τις οποίες οι ηλικίες των 11 και 14 χρόνων είναι ηλικίες αναμενόμενων αλλαγών (Demetriou et al., 1991). Σύμφωνα με τους Demetriou κ.ά. (1991) οι περίοδοι της ηλικίας που συμπίπτουν με τις αλλαγές αυτές συνήθως θεωρούνται ως φάσεις κατά τις οποίες συμβαίνει μια επιτάχυνση της ανάπτυξης. Αυτό αιτιολογεί και την ύπαρξη σημαντικών αυξήσεων στην επίδοση των μαθητών κατά την επίλυση έργων αναλογικού συλλογισμού στις δύο ηλικιακές ομάδες.

Μαθηματικός Αναλογικός Συλλογισμός

Η επίδοση των μαθητών στα έργα της διάστασης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού δεν παρουσιάζει ανάλογες διαφοροποιήσεις σε σχέση με την ηλικία των μαθητών, όπως στην περίπτωση της διάστασης του αναλογικού συλλογισμού. Ενώ η επίδοση των μαθητών στην επίλυση έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού βελτιώνεται σε στατιστικά σημαντικό βαθμό με την αύξηση της ηλικίας τους ειδικά στη Στ' Δημοτικού($t_{α.3\text{-}4}$=5.25, p<.001; $t_{α.σ.}$=4.08, p<.001; $t_{ε.3\text{-}4}$=2.00, p<.05) και τη Β' Γυμνασίου ($t_{α.3\text{-}4}$=2.43, p<.05; $t_{α.σ.}$=2.39, p<.05; $t_{ε.3\text{-}4}$=2.71, p<.01; $t_{ε.σ.}$=2.39, p<.05) , οι μέσοι όροι επίδοσης των μαθητών στην Α' ($t_{ε.σ.}$=-3.24, p<.001) και Γ' Γυμνασίου ($t_{ε.σ.}$=-2.42, p<.05; $t_{ε.3\text{-}4}$=-3.17, p<.01), μειώνονται σημαντικά σε σχέση με τις αντίστοιχες επιδόσεις τους στις προηγούμενες τάξεις (Πίνακας 4). Ανάλογη διαφορά μεταξύ των μέσων όρων επιτυχίας των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού και Α' Γυμνασίου έχει εμφανιστεί και στην έρευνα των Γαγάτση και Καφίδα (1995), ενώ το φαινόμενο αυτό της μείωσης των μέσων όρων επιτυχίας σε συγκεκριμένες ηλικιακές ομάδες ταυτίζεται στη βιβλιογραφία με τη καμπύλη U, λόγω του σχήματος που έχει η γραμμή που αναπαριστά γραφικά τους μέσους όρους επίδοσης (Van Dooren 2005).

Πίνακας 4

Μέσοι Όροι Επίδοσης στα Έργα Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού κατά Τάξη

	Έργα Μαθηματικού Αναλογικού Συλλογισμού							
	Άμεσα				Έμμεσα			
	3 ποσότητες ζητείται η 4η		Σύγκρισης		3 ποσότητες ζητείται η 4η		Σύγκρισης	
Τάξη	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD
Ε' Δημ.	.29	.29	.19	.11	.65	.39	.57	.37
Στ' Δημ.	.47	.37	.25	.17	.72	.33	.55	.37
Α' Γυμν.	.54	.31	.26	.16	.71	.31	.44	.31
Β' Γυμν.	.61	.13	.30	.18	.80	.29	.54	.33
Γ' Γυμν.	.55	.32	.30	.18	.69	.30	.45	.33
Σύνολο	.49	.34	.26	.17	.71	.33	.51	.35

↓↑ * p<0.05

Αυτή η μείωση των μέσων όρων επίδοσης των μαθητών στην Α' και Γ' Γυμνασίου είναι αιτιολογημένη, αν ληφθεί υπόψη ότι στις δύο προηγούμενες τάξεις οι μαθητές ήταν δέκτες συστηματικής διδασκαλίας πάνω στις αναλογίες (Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού, 1996). Πιο συγκεκριμένα η μηχανική εφαρμογή τυπικών στρατηγικών επίλυσης αναλογικών προβλημάτων στη Στ' Δημοτικού και στη Β΄ Γυμνασίου φαίνεται να έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση υψηλών ποσοστών στις τάξεις αυτές που δεν αντιπροσωπεύουν την πραγματική τους ικανότητα για επίλυση των προβλημάτων αυτών. Τα αποτελέσματα αυτά πιστοποιούν με τον καλύτερο δυνατό τρόπο ότι η διδασκαλία των μαθηματικών δεν αποτελεί μια απλή σχέση μεταφοράς από το δάσκαλο στο μαθητή. Οι μαθητές της Α' και της Γ' Γυμνασίου λησμονούν σε κάποιο βαθμό τις στρατηγικές που τους παρουσιάστηκαν κατά τη διδασκαλία και εφαρμόζουν νέες ή τις ίδιες στρατηγικές με διαφορετικό τρόπο υποπίπτοντας σε λάθη. Κατ' επέκταση είναι εμφανές ότι η διάσταση αυτή του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού χαρακτηρίζεται από διδακτικές επιδράσεις και επιρροές.

Ο τρόπος χειρισμού των έργων μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού διαφορετικών πλαισίων παρέμεινε αναλλοίωτος σε Δημοτικό και Γυμνάσιο, παρά την ύπαρξη διαφορών στις στρατηγικές επίλυσης των έργων της διάστασης αυτής. Οι μαθητές τόσο στο Δημοτικό όσο και στο Γυμνάσιο χειρίστηκαν με μεγαλύτερη ευκολία τα έργα στα οποία δίνονταν οι τρεις ποσότητες και ζητούνταν η τέταρτη, ενώ αντιμετώπισαν δυσκολίες στα έργα σύγκρισης. Οι δυσκολίες στα έργα σύγκρισης ήταν αναμενόμενες, αφού υπάρχουν βιβλιογραφικά δεδομένα (Karplus et al., 1983) τα οποία υποδεικνύουν ανάλογες δυσκολίες στο χειρισμό τους από μαθητές της ίδιας ηλικίας. Από την άλλη, μόνο σε ελάχιστες περιπτώσεις μέσα από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών κάθε τάξης, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με έργα αυτού του είδους (Christou & Philippou, 2002). Το γεγονός αυτό ενισχύει τον επηρεασμό της διάστασης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού από τη διδασκαλία.

Μετα-αναλογική Ενημερότητα

Στη διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας οι μαθητές επέδειξαν τελείως διαφορετική συμπεριφορά ως προς την επίλυση των έργων που περιλαμβάνονταν σε αυτή, σε σχέση με τα έργα των άλλων δύο διαστάσεων. Συγκεκριμένα, η επίδοσή τους στα έργα μέτρησης ήταν ιδιαίτερα χαμηλή και ειδικά στο Δημοτικό σχολείο οι μαθητές παρουσιάστηκαν ανέτοιμοι να χειριστούν έργα αυτού του είδους. Η ικανότητα χειρισμού μη αναλογικών έργων άρχισε να εμφανίζεται μόνο προς το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, με μικρούς μέσους όρους επίδοσης (Πίνακας 5). Τα αποτελέσματα αυτά επιβεβαιώνονται από προηγούμενες έρευνες στο χώρο της ψευδαίσθησης της αναλογίας σύμφωνα με τις οποίες μόνο περίπου το ¼ των μαθητών καταφέρνει να επιλύσει μη αναλογικά έργα μέτρησης στην ηλικία των 15 με 16 ετών (De Bock, 1998; Modestou & Gagatsis, 2007; Van Dooren, 2005). Το γεγονός αυτό αποτελεί παράλληλα υποστηρικτικό στοιχείο που επιβεβαιώνει την υπόθεση ότι πίσω από το συγκεκριμένο φαινόμενο δεν κρύβεται ένα σύνηθες λάθος αλλά ένα επιστημολογικό εμπόδιο.

Η επίδοση των μαθητών στη διάκριση των μη αναλογικών έργων υπό μορφή δηλώσεων ήταν καλύτερη σε σχέση με τα μη αναλογικά έργα που αναφέρονταν στην έννοια του εμβαδού. Τα έργα υπό μορφή δηλώσεων, τα οποία πρώτη φορά έχουν χρησιμοποιηθεί σε έρευνα που σχετίζεται με το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας, αν και παρέπεμπαν στη χρήση του αναλογικού μοντέλου, επέτρεπαν πιο εύκολα την ανατροπή της ψευδαίσθησης με τη χρήση της "κοινής λογικής". Έτσι, ήταν πολύ πιο εύκολο για τους μαθητές να αντιληφθούν την απουσία ύπαρξης αναλογικής σχέσης σε μια δήλωση που η ορθότητά της μπορούσε να κριθεί με βάση εμπειρίες της καθημερινής ζωής, παρά σε ένα έργο που η επίλυσή του απαιτούσε σε κάποιο βαθμό γνώσεις γεωμετρίας. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει την αναγκαιότητα συμπερίληψης έργων της συγκεκριμένης μορφής σε κάθε προσπάθεια που σχετίζεται με το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας και στοχεύει στην ανάπτυξη της μετα-αναλογικής ενημερότητας των μαθητών.

Πίνακας 5

Μέσοι Όροι Επίδοσης στα Έργα Μετα-Αναλογικής Ενημερότητας κατά Τάξη

	Έργα Μετα-αναλογικής ενημερότητας							
	Δηλώσεις				Έμμεσα			
	Αναλογικές		Μη Αναλογικές		3 ποσότητες ζητείται η 4η		Σύγκρισης	
Τάξη	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD	$\overline{X}$	SD
Ε' Δημ.	.54	.31	.25	.24	0	0	.05	.13
Στ' Δημ.	.62	.30	.28	.26	.01	.79	.05	.12
Α' Γυμν.	.67	.28	.23	.24	.03	.12	.03	.11
Β' Γυμν.	.63	.31	.31	.27	.06	.17	.05	.14
Γ' Γυμν.	.66	.27	.44	.26	.16	.27	.16	.29
Σύνολο	.62	.30	.29	.26	.05	.16	.06	.17

↓↑ * p<0.05

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα ευρήματα της παρούσας εργασίας έχουν δείξει ότι η μαθηματική αναλογική σκέψη μπορεί να ερμηνευθεί από ένα τρισδιάστατο μοντέλο στο οποίο περιλαμβάνεται ως αναπόσπαστο μέρος η ικανότητα επίλυσης αναλογικών και μαθηματικών αναλογικών έργων, καθώς και η ικανότητα διάκρισης και επίλυσης μη αναλογικών έργων. Το μοντέλο αυτό προσφέρει ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης, το οποίο λαμβάνει υπόψη βιβλιογραφικά δεδομένα (Karplus et al, 1983; Cramer et al., 1993; Lamon, 1999) που τονίζουν την ανάγκη διαφοροποίησης της θεώρησης της μαθηματικής αναλογικής σκέψης ως ταυτόσημης με την ικανότητα επίλυσης μαθηματικών αναλογικών έργων. Η θέση των Karplus κ.ά. (1983) αλλά και της Lamon (1999) ότι η ικανότητα του ατόμου να διακρίνει κατά πόσο ένα πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού, προσθετικού συλλογισμού ή οποιασδήποτε άλλης αριθμητικής σχέσης είναι απαραίτητη για τη μαθηματική αναλογική σκέψη, ικανοποιείται με τη συμπερίληψη στο μοντέλο της διάστασης της μετα-αναλογικής ενημερότητας.

Η διάσταση της μετα-αναλογικής ενημερότητας περιλαμβάνει έργα που προϋποθέτουν για την επίλυσή τους ενεργοποίηση μηχανισμών που δεν είναι αποκλειστικά γνωστικοί. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει το μεταγνωστικό χαρακτήρα της διάστασης αυτής, αφού πρώτιστα συνδέεται με τη δεξιότητα αναγνώρισης και καθορισμού της φύσης και των χαρακτηριστικών της προβληματικής κατάστασης. Η συμπερίληψη της διάστασης της μετα-αναλογικής ενημερότητας στο μοντέλο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης ανατρέπει τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα που έφεραν την ικανότητα επίλυσης μη αναλογικών έργων σε αντιδιαστολή με την ικανότητα επίλυσης αναλογικών έργων (De Bock et al., 1998; Van Dooren et al., 2003; Van Dooren, 2005). Το φαινόμενο της ψευδαίσθησης της αναλογίας επαναπροσδιορίζεται σε σχέση με την ικανότητα των μαθητών για μαθηματική αναλογική σκέψη. Συγκεκριμένα, το φαινόμενο αυτό φαίνεται να οφείλεται και στη περιορισμένη μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών, η οποία αρχίζει να εμφανίζεται μόνο προς το τέλος της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Ταυτόχρονα, η ανάπτυξη της μετα-αναλογικής ενημερότητας είναι κάτι δύσκολο να επιτευχθεί, αφού σε αυτήν παρεμβαίνει το επιστημολογικό εμπόδιο της αναλογίας που δυσχεραίνει την προσπάθεια των μαθητών να διακρίνουν τις μη αναλογικές από τις αναλογικές καταστάσεις.

Η δεύτερη διάσταση που περιλαμβάνεται στο μοντέλο ερμηνείας της μαθηματικής αναλογικής σκέψης αφορά στην έννοια του αναλογικού συλλογισμού. Συγκεκριμένα, η ικανότητα των μαθητών να επιλύουν τυπικές λεκτικές και αριθμητικές αναλογίες της μορφής Α:Β :: Γ:Δ αποτελεί ένα από τους βασικούς ρυθμιστές της μαθηματικής αναλογικής τους σκέψης. Η θέση αυτή ενισχύει τα αποτελέσματα της έρευνας των Deal και Hardy (2004), η οποία έδειξε ότι η ανάπτυξη της ικανότητάς για αναλογικό συλλογισμό αντικατοπτρίζει ανάπτυξη της αντίστοιχης ικανότητας για μαθηματικό συλλογισμό. Από τη στιγμή που οι μαθητές είναι ικανοί να εντοπίσουν τη δομική ομοιότητα ανάμεσα σε λεκτικές και αριθμητικές σχέσεις, μπορούν ευκολότερα να αντιληφθούν και τις σχέσεις που υπάρχουν σε μια μαθηματική αναλογία (Lamon, 1999). Ο εντοπισμός της δομικής ομοιότητας που υπάρχει ανάμεσα στους όρους τυπικών αναλογιών παραπέμπει σε δεύτερου επιπέδου σχέσεις και άρα στην ικανότητα των μαθητών να μη μένουν σε επιφανειακές προσθετικές σχέσεις, παρουσιάζοντας έτσι μαθηματική αναλογική σκέψη.

Η τελευταία διάσταση του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης είναι η διάσταση που έχει ταυτιστεί τα τελευταία χρόνια με την ίδια την μαθηματική αναλογική σκέψη (Baxter & Junker, 2001; Misailidou & Williams, 2003), οπότε η αναγκαιότητά της για την ερμηνεία της μαθηματικής αναλογικής σκέψης είναι κάτι περισσότερο από αιτιολογημένη. Μέσα στα πλαίσια της διάστασης του μαθηματικού αναλογικού συλλογισμού επιβεβαιώθηκε η αναγκαιότητα χρήσης έργων που να παρουσιάζονται όχι μόνο μέσω της τυπικής μορφής όπου δίνονται οι τρεις ποσότητες και ζητείται η τέταρτη, αλλά και υπό μορφή σύγκρισης. Την ανάγκη αυτή εντοπίζουν και οι Karplus κ.ά. (1983), σύμφωνα με τους οποίους η χρήση καταστάσεων που να προωθούν την εφαρμογή στρατηγικών σύγκρισης είτε ανάμεσα είτε μεταξύ των ποσοτήτων, συνδέεται με την ύπαρξη μαθηματικής αναλογικής σκέψης, αφού οι καταστάσεις αυτές δεν παραπέμπουν άμεσα στη συστηματική εφαρμογή μνημονικών στρατηγικών.

Τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας μπορούν να αποτελέσουν έναυσμα για περαιτέρω ερευνητική δραστηριότητα μέσα από μια διαχρονική διερεύνηση του μοντέλου μαθηματικής αναλογικής σκέψης, η οποία θα δώσει στοιχεία για τις τρεις διαστάσεις σε διαφορετικά στάδια ανάπτυξης. Ειδικότερα, ακολουθώντας τον ίδιο πληθυσμό από το Δημοτικό, στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο θα εντοπιστεί κατά πόσο μία διάσταση ερμηνεύει με διαφορετικό τρόπο και σε διαφορετικό βαθμό τη μαθηματική αναλογική σκέψη, ανάλογα με την ηλικία στην οποία βρίσκεται το άτομο. Συνάμα μια έρευνα αυτού του εύρους, η οποία μελετά τη μετάβαση ανάμεσα σε διαφορετικά στάδια ανάπτυξης, θα επιτρέψει να διαφανεί το πώς εξελίσσεται η μετα-αναλογική ενημερότητα των μαθητών μέσα σε κάθε στάδιο. Η παράλληλη διερεύνηση της μετα-αναλογικής ενημερότητας με την ευρύτερη μετα-ενημερότητα των μαθητών θα δείξει κατά πόσο η ανάπτυξη της μετα-αναλογικής ενημερότητας ακολουθεί την ίδια κυκλική διαδικασία μέσα σε κάθε στάδιο ανάπτυξης, όπως στην περίπτωση της γενικότερης μετα-ενημερότητας: περιορισμένη, ασαφής στην αρχή και επηρεασμένη από το περιεχόμενο, και πιο ευρεία και ακριβής στη συνέχεια, επικεντρωμένη σε διαδικασίες (Demetriou & Kazi, 2006).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Baxter, P. G., & Junker, B. (2001). *Designing cognitive- developmental assessments: A case study in proportional reasoning.* Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Measurement in Education, Seattle: USA. Retrieved April 23rd from http://www.stat.cmu.edu/~brian/rpm/baxterjunkerncme.pdf

Bentler, M. P. (1995). *EQS structural equations program manual*. Encino, CA: Multivariate Software Inc.

Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self regulation and other more mysterious mechanisms. In F. Weinert, & R. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation and understanding* (pp.65-115). London: Lawrence Erlbaum Associates.

Christou, C., & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 321-336.

Cramer, K., Post, T., & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (pp. 159-178). New York: Macmillan.

Davidson, E. J., Deuser, R., & Sternberg, J. R. (1994). The role of metacognition in problem solving. In Metcalfe, J. & Shimamura, P. A. (Eds.), *Metacognition: Knowing about knowing* (pp. 207-226).

Deal, D., & Hardy, S. (2004). Portraying mathematical and analogical reasoning in the young: Three case studies. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp. 97-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, *35*, 65-85.

Demetriou, A., & Kazi, S. (2006). Self-awareness in g (with processing efficiency and reasoning). *Intelligence*, *34*, 297-317.

Demetriou, A., Platsidou, M., Efklides A., Metallidou, Y., & Shayer, M. (1991). Structure and sequence of the quantitative-relational abilities and processing potential from childhood and adolescence. *Learning and Instruction: The Journal of the European Association for Research on Learning and Instruction, 1,* 19-44.

English, L. D. (2004). Mathematical and analogical reasoning in early childhood. In L. D. English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp.1-22). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.

Γαγάτσης Α., & Καφίδας, Α. (1995). Λάθη μαθητών δημοτικού και γυμνασίου σε προβλήματα αναλογιών. Στου Α. Γαγάτση (Επ. Εκδ.), *Διδακτική και ιστορία των μαθηματικών* (σελ. 67-94). Θεσσαλονίκη: ERASMUS.

Goswami, U. (1992). *Analogical reasoning in children*. *Essays in developmental psychology series.* UK: Lawrence Erlbaum Associates.

Hatano, G., & Sakakibara, T. (2004). Commentary: Toward a cognitive-sociocultural psychology of mathematical and analogical reasoning development. In L. D.English (Ed.), *Mathematical and analogical reasoning of young learners* (pp.187-213). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Holland, H. J., Holyoak, J. K, Nisbett, E., & R., Thagard, R. P. (1989). *Induction: Processes of inference learning and discovery*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Karplus, R., Pulos, S., & Stage, K. E. (1983). Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and process* (pp. 45-90). New York: Academic Press.

Kline, M. (1990). *Mathematical thought from ancient to modern times* (Vol. 1). New York: Oxford University Press.

Lamon, J. S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding*: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M (1988). Proportional reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 93- 118). NCTM: Lawrence Erlbaum Associates.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. New York: Cambridge University Press.

Meagher, D. (2006). *Harcourt assessment report: Introduction to the Miller analogies test*. Retrieved March 7, 2006, from http://harcourtassessment.com/hai/Images/pdf/assessmentReports/MillerWhitepaper.pdf

Misailidou, C., & Williams, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behaviour*, *22*, 335-368.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, *27* (1), 75-92

Modestou, M., Elia, I., Gagatsis, A., & Spanoudes, G. (in press). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.

Van Dooren, W. (2005). *The linear imperative. A search for the roots and an evaluation of the impact of the over-use of linearity*. Belgium: Katholieke Universiteit Leuven.

Van Dooren, W., De Bock, D., De Bolle, E., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2003). Secondary school students' improper proportional reasoning: The role of direct versus indirect measures. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 2,* 1-18.

Vosniadou, S. (1989). Analogical reasoning as a mechanism in knowledge acquisition: a developmental perspective. In S. Vosniadou & A. Ortony (Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 413-437). Cambridge: Cambridge University Press.

Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού. (1996). *Αναλυτικά προγράμματα δημοτικής εκπαίδευσης*. Λευκωσία: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού.